

ANNEXE

Th. GUILBAUD

Mathématiques, Ensembles et fonctions — Calcul exponentiel
(Tome I, chap. VI, Paris, PUF, Coll. Themis, 1966)

QUELQUES INDICATIONS CONCERNANT LES ENSEMBLES INFINIS

Il s'agit de savoir comment, et en quelle mesure, les éléments de grammaire et de logique qui viennent d'être présentés dans les chapitres précédents sont encore valables et utiles lorsque font défaut les procédés d'énumération complète des éléments d'un ensemble.

Partons de l'ensemble fondamental : celui des entiers naturels. On ne peut nier que l'écriture suivante :

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$$

(assortie au besoin d'un commentaire *ad hoc*), ne soit fort claire, malgré les points de suspension. On ne peut nier non plus qu'il soit nécessaire de considérer la catégorie de Nombres Entiers Naturels ⁽¹⁾.

Admettons alors qu'on puisse écrire :

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$$

c'est-à-dire, selon nos conventions, non seulement considérer la multitude des entiers comme un *tout*, mais encore traiter ce nouvel objet comme on a fait des collections finies ⁽²⁾.

Nous admettons donc la locution « l'ensemble N des entiers naturels ».

Première constatation : l'ensemble N est *infini* ; on dit encore : N comprend une infinité de nombres entiers. Les points de suspension sont inévitables : il est impossible d'établir une liste complète. Quelle que soit la liste d'entiers qu'on me présentera, je pourrai toujours indiquer quelque nombre qui n'y figure pas, construire des entiers nouveaux ; par exemple : prendre le plus grand de ceux qui ont été écrits et ajouter l'unité. Mais, au premier abord, ce caractère n'est pas très gênant : on peut bien traiter N comme on a appris à le faire sur les ensembles finis. Essayons. Au début, comme on va le voir, tout va bien.

1. Comment on définit des parties de N

On peut aisément définir avec précision des *parties* de N . Sans parler de la partie vide ($\emptyset$), il y a d'abord des parties finies, telles que :

$$\{\text{les diviseurs de } 360\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 180, 360\}$$

(on vérifiera qu'il y a 24 éléments).

Il y a aussi des parties infinies :

$$\begin{aligned} \{\text{pairs}\} &= \{2, 4, 6, \dots\} \\ \{\text{impairs}\} &= \{1, 3, 5, \dots\} \\ \{\text{carrés}\} &= \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \\ \{\text{multiples de } 5\} &= \{5, 10, 15, \dots\} \\ \{\text{premiers}\} &= \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \\ \{\text{carrés de premiers}\} &= \{1, 4, 9, 25, 49, \dots\} \\ \{\text{puissances de } 2\} &= \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\} \end{aligned}$$

etc.

Certaines abréviations sont possibles :

$$\{2n\}, \{5n\}, \{2n+1\}, \{n^2\}, \{2^n\}$$

Mais les nombres premiers ne sont pas définis de cette façon constructive : on peut seulement « cribler » ; d'où la nécessité d'une démonstration du caractère infini, qui n'est plus évident. Arrêtons-nous un instant sur ce point, et citons le premier énoncé connu (Éléments d'Euclide, livre IX) : « Les Nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude proposée de

⁽¹⁾ Naturels, parce qu'on exclut ici les nombres négatifs ; on remarquera que nous n'avons pas compté le zéro, contrairement aux coutumes modernes : cela n'a guère d'importance pour ce qui va suivre.

⁽²⁾ On écrira parfois $N = \{n\}$ pour abrégier.

nombres premiers. » C'est dire qu'un catalogue de nombres premiers ne peut jamais être complet. Comment le prouve-t-on ? Il suffit de savoir ceci : étant donné un nombre entier quelconque, ou bien il est premier, ou, s'il ne l'est pas, il est divisible et parmi les diviseurs figure nécessairement un nombre premier.

Soit alors un catalogue de nombres premiers : $\{a, b, c, d, e, f\}$; partageons en deux parties complémentaires d'une façon quelconque, et formons la somme des produits. Par exemple :

$$x = a + bcdef \text{ (ou : } abf + cde, \text{ etc.)}$$

Or, un tel nombre n'est certainement pas divisible, ni par a , ni par b , ni par aucun des premiers du catalogue. Il fournira donc un nombre premier (x lui-même ou l'un de ses diviseurs) qui n'est pas dans le catalogue.

On pourra examiner un exemple simple : $\{1, 3, 7\}$ ou tout autre. On a tenu à citer ce raisonnement, car c'est un modèle du genre. On retrouvera plus loin un autre modèle : il s'agira encore de prouver qu'une construction n'est jamais close.

2. Algèbre de Boole

Sur des parties, définies d'une façon ou d'une autre, les opérations booléennes sont possibles et conservent leur propriété :

$\{\text{pairs}\}$ et $\{\text{impairs}\}$ sont complémentaires

$\{\text{multiples de } 6\} \cap \{\text{multiples de } 10\} = \{\text{multiples de } 30\}$

Nous n'insisterons pas.

3. Fonctions

On peut définir des fonctions, et en particulier des applications $N \rightarrow N$. Quelques exemples :

$v(x)$ = le nombre des diviseurs du nombre x

x^2 = le carré de x

$p(x)$ = le nombre premier de rang x (le x^{e} premier)

Voici un extrait des tables :

x	1	2	3	4	5	6	7	...
$v(x)$	1	2	2	3	2	4	2	...
x^2	1	4	9	16	25	36	49	...
$p(x)$	1	2	3	5	7	11	13	...

On peut multiplier les exemples sans difficulté : l'arithmétique, simple ou savante, en fournit autant qu'on veut (Exercice : donner un sens précis à l'énoncé : il y a une infinité de fonctions $N \rightarrow N$).

On peut d'ailleurs définir des fonctions de plusieurs variables, $f(x, y)$, du type $N \times N \rightarrow N$. Par exemple : $x + y$, xy , x^y , ou bien : le plus grand commun diviseur de x et y , etc.

Nous ne nous arrêterons pas aux propriétés spéciales de telle ou telle fonction : notre sujet d'étude n'est pas l'arithmétique ; mais nous examinerons certaines de leurs propriétés « ensemblistes » (c'est-à-dire du point de vue de la Théorie des Ensembles).

4. Le premier paradoxe

Voici quelques questions : la fonction prend-elle toutes les valeurs possibles ? Prend-elle deux fois la même valeur ? En langage technique, telle application est-elle surjective ? injective ?

On peut prouver que $v(x)$, ci-dessus définie, est surjective : chercher par exemple $v(x) = 5$. Mais ce n'est pas très facile. Par contre, il est clair que $x \rightarrow x^2$ est injective, et non surjective : il y a des nombres qui ne sont pas carrés, d'une part, et, d'autre part, deux nombres différents ne peuvent avoir même carré ⁽¹⁾.

(1) Rappelons qu'il s'agit d'entiers naturels ; pas d'entiers négatifs !

Cela n'est guère remarquable — dira-t-on ? il faut savoir s'étonner des choses évidentes : l'un des premiers textes qui notent le caractère réellement étrange et provocant des ensembles infinis se trouve dans les *Discorsi* du célèbre Galilée (1638) ; comment peut-il se faire que la table $x \rightarrow x^2$ établisse une correspondance entre les entiers x et les carrés x^2 ; car 1° cette correspondance est biunivoque : à chaque nombre son carré, et inversement ; or 2° l'ensemble des carrés est une partie seulement de l'ensemble des entiers. Si l'on y réfléchit c'est paradoxal — ou plutôt, c'est un premier contraste avec le domaine du fini, avec les rangements d'objets dans des boîtes (cf. principe des tiroirs, ci-dessus, p. 59), par lesquels nous avons illustré nos débuts en la matière.

C'est bien ce que voyait Galilée : la tradition affirmait « *Totum parte majus* » (c'est même un Axiome, chez Euclide). Et parmi les significations intuitives de cet adage (répandu aussi bien hors du cercle des mathématiciens) il y avait sans doute ceci :

Si l'on prend seulement une partie d'un ensemble, les éléments en deviennent « moins nombreux ».

En langage moderne : soit une partie B d'un ensemble A ,

$$B \subset A$$

si c'est une vraie partie, c'est-à-dire si $B \neq A$, alors pour appliquer : $A \rightarrow B$, il y aura au moins deux objets de A qui s'appliquent au même objet de B . C'est le principe des tiroirs : il y a moins de tiroirs que d'objets, donc deux objets dans le même tiroir. Or, voici justement que l'ensemble N peut être mis en correspondance biunivoque avec une de ses parties.

Et la forme arithmétique de l'exemple (le carré) ne joue ici aucun rôle ; c'eût été la même chose avec les cubes, avec les impairs, avec les premiers : n'importe quelle partie infinie fait l'affaire.

C'est même, très précisément, à cela qu'on reconnaît qu'une partie de N est infinie : que si l'on veut en numérotter les éléments, on n'aura jamais fini — ou en un autre langage : « tous » les numéros disponibles, « tous » les entiers naturels y passeront.

5. Correspondances biunivoques

En un langage un peu vague, ce qu'on vient de voir montre que des ensembles « plus restreints » que N ne sont cependant pas « moins nombreux ». On peut aussi bien montrer la même chose avec certains ensembles « plus larges ».

Une somme (ensembliste), par exemple, produira une situation paradoxale. L'invention des nombres négatifs élargit l'ensemble N : on adjoint à un ensemble identifié à N (à savoir les nombres positifs), d'abord le zéro, puis un autre ensemble qui est une image de N (les négatifs). L'ensemble complet :

$$Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

(Z : initiale de « nombre », en allemand)

$$\text{est } Z = \{0\} + \{N^+\} + \{N^-\}$$

Mais cette « somme » n'est pas « plus nombreuse » ; on peut encore (et de bien des façons) numérotter les éléments de Z , c'est-à-dire établir une correspondance biunivoque, telle que :

Z	0	+1	-1	+2	-2	...
N	1	2	3	4	5	...

(si $x \in Z$ est positif, on aura $y = 2x \in N$, et s'il est négatif on prendra $y = -2x + 1$).

6. Numéroté un ensemble infini

On peut faire la même chose avec un produit. Rappelons d'abord le schématisme du produit dans le cas fini. Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Formons $A \times A$ en construisant le tableau carré :

	1	2	3
1			
2			
3			

Supposons maintenant qu'on veuille remplir les cases vides : si l'on ne dispose que des mêmes signes : (1, 2, 3), il faudra bien que plusieurs cases reçoivent le même signe. L'application $A \times A \rightarrow A$ ne peut pas être injective (sauf le cas où il n'y aurait qu'un élément et une seule case).

Prenons maintenant l'ensemble infini N et formons $N \times N$:

	1	2	3	4	...	x	...
1							
2							
3							
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

Nous pouvons remplir les cases avec des éléments de N . On peut le faire de bien des manières (table d'addition, de multiplication, *pgcd*, *ppcm*, etc.) — mais on peut même le faire en évitant les répétitions. Voici, entre autres, quelques solutions de ce problème :

applications injectives : $N \times N \rightarrow N$

1 ^{re} solution						2 ^e solution					
1	2	6	7	...		1	2	4	7	11	16
3	5	8	14	...		3	5	8	12	17	...
4	9	13	...	...		6	9	13	...	...	...
10	12	...	...	...		10	14	...	...	...	...
11	...	...	...	...		15	...	...	...	...	...

ou bien encore :

3 ^e solution				
1	4	9	16	...
2	3	8	15	...
5	6	7	14	...
10	11	12	13	...
17	18	19	20	...

(Exercice : en trouver d'autres).

La loi d'inscription est dans chaque cas assez claire pour qu'on soit assuré de pouvoir prolonger aussi loin qu'on voudra : on notera que ces applications sont non seulement injectives, mais bijectives ; on peut donc établir des correspondances biunivoques : $N \times N \rightarrow N$.

7. Les fractions

A partir de l'ensemble N des entiers naturels on sait comment construire l'ensemble Z des entiers qualifiés (par un signe); on sait aussi comment se forme l'ensemble F des nombres fractionnaires (sans signe); c'est une partie du produit $N \times N$:

1	2	3	4	5	6	...
1/2		3/2		5/2		...
1/3	2/3		4/3	5/3		...
1/4		3/4		5/4		...
1/5	2/5	3/5	4/5		6/5	...
...	...	...	...	...	...	...

Avec quelques légères modifications, on pourra donc utiliser les procédés de la section précédente et numérotérot toutes les fractions, c'est-à-dire établir une bijection :

$$F \rightarrow N$$

8. L'infini dénombrable et les autres

Tous les ensembles infinis dont il a été question jusqu'ici (parties de N , ou bien de $N \times N$) peuvent ainsi être mis en correspondance biunivoque avec N lui-même (lequel en constitue pour ainsi dire la matière première). On peut « numérotérot » leurs éléments. Leur forme générale est

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

ou, en abrégé : $\{a_n\}$.

Arrivés en ce point de notre investigation, on pourrait être tenté d'oublier les paradoxes; finalement, dirait-on, il y a les ensembles finis et les autres. Et tous les autres rencontrés jusqu'ici ont un caractère commun : ils ressemblent en somme à l'ensemble type, à N , l'ensemble des entiers naturels. Ils ne sont ni plus, ni moins « nombreux » les uns que les autres — ils sont tous « innombrables ».

Pourquoi se fait-il alors que les mathématiciens, depuis G. Cantor, ont décidé de les appeler « infinis et dénombrables »⁽¹⁾?

C'est qu'en effet les « infinis » ne se valent pas tous, et qu'il n'est pas vrai que rien ne subsiste des intuitions premières de « plus nombreux », « moins nombreux », « nombre cardinal », quand on s'oblige à considérer l'infini; il n'est pas vrai que seules demeurent les notions qualitatives et logiques. Car l'enquête n'est pas terminée : et l'on va retrouver maintenant des idées qui ont quelques rapports avec la catégorie du « nombreux ».

9. L'argumentation diagonale

Prenons d'abord un ensemble fini, soit :

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

pour fixer les idées.

Pour déterminer une partie de E , il suffit de décider, pour chacun des quatre éléments, s'il y est présent (+) ou bien absent (0):

	(1)	(2)	(3)	(4)
(a)	+	0	0	0
(b)	0	0	+	0
(c)	0	+	0	+
(d)	+	+	+	0

Voici donc quatre parties de E prises au hasard.

Considérons alors les marques écrites « en diagonale »,

⁽¹⁾ Dans presque toutes les langues, c'est une expression analogue, et qu'on peut traduire par : « que l'on peut compter » (abzählbar, countable, stchetnyi).

6. Numéroté un ensemble infini

On peut faire la même chose avec un produit. Rappelons d'abord le schématisme du produit dans le cas fini. Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Formons $A \times A$ en construisant le tableau carré :

	1	2	3
1			
2			
3			

Supposons maintenant qu'on veuille remplir les cases vides : si l'on ne dispose que des mêmes signes : (1, 2, 3), il faudra bien que plusieurs cases reçoivent le même signe. L'application $A \times A \rightarrow A$ ne peut pas être injective (sauf le cas où il n'y aurait qu'un élément et une seule case).

Prenons maintenant l'ensemble infini N et formons $N \times N$:

	1	2	3	4	...	α	...
1							
2							
3							
$\vdots$							
γ							
$\vdots$							

Nous pouvons remplir les cases avec des éléments de N . On peut le faire de bien des manières (table d'addition, de multiplication, *pgcd*, *ppcm*, etc.) — mais on peut même le faire en évitant les répétitions. Voici, entre autres, quelques solutions de ce problème :

applications injectives : $N \times N \rightarrow N$

1 ^{re} solution						2 ^e solution					
1	2	6	7	...		1	2	4	7	11	16
3	5	8	14	...		3	5	8	12	17	...
4	9	13	...	...		6	9	13	...	...	...
10	12	...	...	...		10	14	...	...	...	...
11	...	...	...	...		15	...	...	...	...	...

ou bien encore :

3 ^e solution				
1	4	9	16	...
2	3	8	15	...
5	6	7	14	...
10	11	12	13	...
17	18	19	20	...
...	...	...	...	...

(Exercice : en trouver d'autres).

La loi d'inscription est dans chaque cas assez claire pour qu'on soit assuré de pouvoir prolonger aussi loin qu'on voudra : on notera que ces applications sont non seulement injectives, mais bijectives ; on peut donc établir des correspondances biunivoques : $N \times N \rightarrow N$.

à savoir : la première de la première ligne, la seconde de la seconde ligne, et ainsi de suite :

$$(+ \ 0 \ 0 \ 0)$$

et prenons, point par point, la marque contraire

$$(x) = (0 \ + \ + \ +)$$

Je dis : 1° que (x) représente une partie de E , et 2° que cette partie est certainement différente de a (par la première marque), de b (par la seconde), etc.

Nous avons donc construit, mécaniquement, une partie forcément *différente* de celles qui figuraient dans le tableau.

Concluons : un tableau carré (autant de lignes que de colonnes) ne pourra jamais être une liste complète des parties d'un ensemble.

C'est là une façon qui pourra paraître un peu détournée de prouver que l'ensemble des parties de E est plus nombreux que l'ensemble des éléments. Nous savions déjà que l'ensemble E ayant 4 éléments possède $2^4 = 16$ parties ; et on sait que 16 est plus grand que 4. Toutefois, le lecteur pourra se demander comment il établit que 2^n est supérieur à n (pour toute valeur de n) (voir *infra*, p. 140).

En tout cas l'argumentation « diagonale » a un grand mérite : elle est encore valable pour les ensembles infinis : c'est Cantor qui le fit remarquer en 1892. Soit un tableau (infini) de parties de N .

N	1	2	3	4	5	6	7	8	...
(pairs)	0	+	0	+	0	+	0	+	...
(impairs)	+	0	+	0	+	0	+	0	...
(carrés)	+	0	0	+	0	0	0	0	...
(cubes)	+	+	0	0	0	0	0	+	...
(premiers)	+	+	+	0	+	0	+	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Repérons la diagonale et écrivons le contraire :

$$(X) : + \ + \ + \ + \ 0 \ \dots$$

Nous pouvons affirmer que (X) ne figure certainement pas dans le tableau.

Donc : aucun tableau de ce genre ne peut comprendre toutes les parties de N . Et pourtant ce tableau était infini.

On dira : si l'on établit une liste infinie et *dénombrable* de parties de N , elle ne peut comprendre toutes les parties de N .

Où encore : l'ensemble 2^N des parties de N n'est pas dénombrable.

Voici donc un infini plus nombreux que N , si l'on ose ainsi parler.

Si au lieu de $(0, +)$ on avait placé dans le tableau, en guise de marques, des nombres entiers, chaque ligne aurait représenté une fonction $N \rightarrow N$ et le même raisonnement aurait montré que l'ensemble N^N de toutes les fonctions arithmétiques n'est pas dénombrable. Plus généralement l'ensemble $\{A \rightarrow B\}$ n'est pas dénombrable quand A et B le sont.

D'après l'argumentation diagonale (dont on comparera la ligne générale avec l'argumentation euclidienne sur la multitude des nombres premiers), l'ensemble des parties N n'est pas « dénombrable » ; on n'en peut point faire une liste, même illimitée (une liste illimitée, c'est la forme même de N), ce n'est donc pas un objet facile à concevoir. Si nous revenions aux images qui nous ont servi dans le cas fini (voir ci-dessus page 18), nous devrions parler d'une suite illimitée de choix dichotomiques, d'un arbre infini. Mais est-ce utile ? La tradition mathématique répond que c'est nécessaire. Et c'est moins paradoxal qu'il ne semble.

Certes, quand on calcule, on ne manipule jamais, finalement, que des nombres *rationnels* entiers ou fractionnaires, avec (ou sans signe), c'est-à-dire des assemblages de symboles dont l'ensemble est infini mais *dénombrable*, comme $\mathbb{Z}$ et comme $\mathbb{F}$. Mais lorsqu'on établit un *programme* de calcul, on doit raisonner, non plus sur tels ou tels nombres, mais sur des catégories de nombres.

Ainsi, nous montrerons, dans la Seconde Partie, qu'on ne peut se passer de la technique des approximations ; or, préparer un calcul approché, ce n'est pas fournir un résultat inexact — bien qu'acceptable dans telles ou telles circonstances — c'est indiquer comment choisir, selon les circonstances et les besoins, une procédure qui conduise à un résultat assez proche de l'exactitude. Ce sera — par exemple et le plus souvent — donner le moyen de construire une suite illimitée d'approximations enchaînées, dont chacune est meilleure que la précédente, laissant à l'usager le soin de choisir le point de satisfaction, compte tenu de la peine des calculs et du coût de l'erreur.

Or, une suite de fractions, par exemple, c'est une fonction :

$$N \rightarrow F$$

qui donne réponse à toute question : « Quelle est la n^{e} fraction de la suite $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$? »

Comme on a pu le voir ci-dessus, l'ensemble des objets f (ensemble des procédures d'approximations successives) n'est pas dénombrable.